Difracción de Fresnel

Propagación de un frente de ondas esférico

Principio de Huygens-Fresnel

- Cada punto en el frente de onda se vuelve fuente puntual de ondas esféricas que se propagan. La superposición de estos frentes da lugar al nuevo frente de ondas.
- En principio entonces también habría ondas esféricas que se propagan hacia atrás.
- Para darle la vuelta a esta inconveniencia se introduce el factor de inclinación.

$$K(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

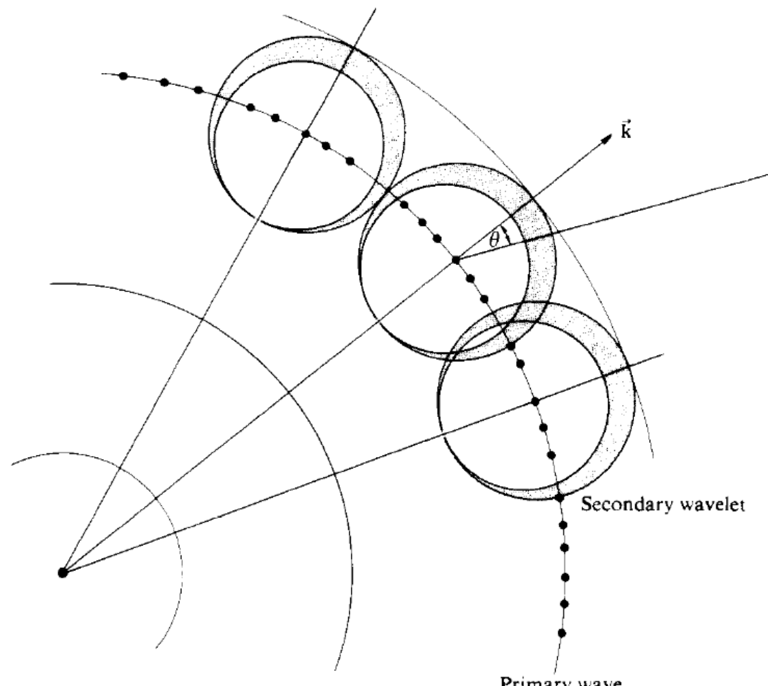


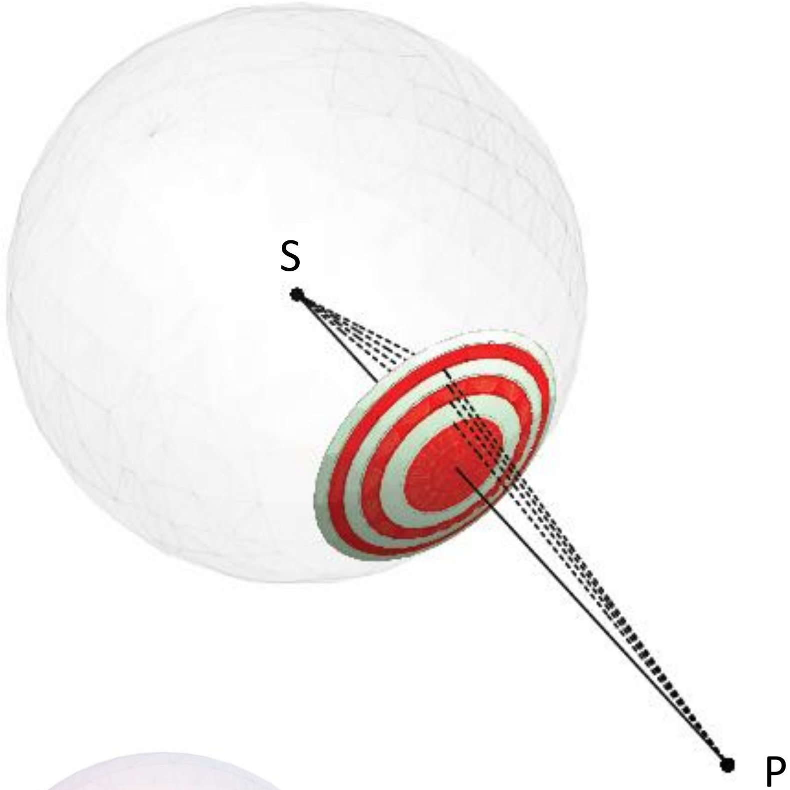
Figure 10.36 Secondary wavelets.

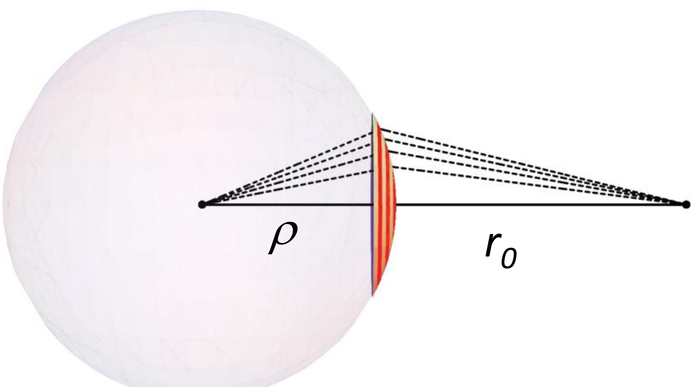
Propagación libre de una onda esférica

- Estudiamos primero la construcción de Fresnel para describir la propagación sin obstáculos de una onda esférica.
- El frente de onda es una esfera de radio ρ. A partir de esta esfera construimos las <u>*zonas de Fresnel de medio periodo*</u>.
- Tomando como centro el punto de observación P trazamos esferas concéntricas de radios

$$r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$$
$$r_2 = r_0 + \lambda$$
$$\vdots$$
$$r_m = r_0 + \frac{m\lambda}{2}$$

- Las zonas son las regiones de intersección de estas esferas con el frente de ondas original.





Contribución de puntos dentro de una zona

- La amplitud de la onda en el frente esférico es

$$A = \frac{A_0}{\rho}\cos(\omega t - k\rho)$$

- Tomemos un anillo dentro de una zona de ancho dS. La contribución a la amplitud en P de los puntos en ese anillo es

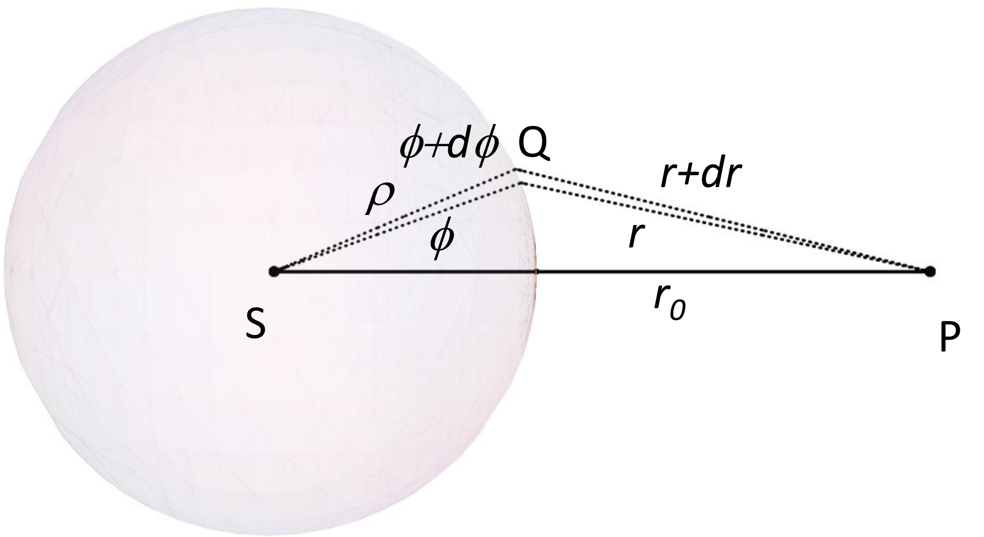
$$dA = K(\theta)\frac{A_S}{r}\cos[\omega t - k(\rho + r)]dS$$

  donde A_S es la amplitud por unidad de área del frente esférico.
- Los puntos dentro de una zona se encuentran a una distancia $\lambda/2$ mayor que los de la zona anterior, y por tanto contribuirán en signos opuestos a la amplitud. El factor K es ~ constante en una zona.

Talacha

- Para obtener *dS* en función de *r y dr*. *dS* es igual al área de un anillo de radio $\rho\,\text{sen}\phi$ y ancho $\rho d\phi$.

$$dS = (2\pi\rho\,\text{sen}\phi)\rho d\phi$$



- Aplicamos ley de cosenos a PQS.

$$r^2 = \rho^2 + (\rho + r_0)^2 - 2\rho(\rho + r_0)\cos\phi$$

- Diferenciando

$$2rdr = 2\rho(\rho + r_0)\text{sen}\phi d\phi$$

- Por lo que resulta

$$dS = 2\pi \frac{\rho}{\rho + r_0} rdr$$

Contribución a la amplitud

$$dA = K(\theta)\frac{A_S}{r}\cos[\omega t - k(\rho + r)]2\pi \frac{\rho}{\rho + r_0} rdr$$

Contribución de la zona #*p*

- Integramos la expresión anterior entre r_{p-1} y r_p.

$$A_p = K(\theta)\frac{2\pi A_S \rho}{\rho + r_0}\int \cos[\omega t - k(\rho + r)]dr$$

$$= -\frac{K_p A_S \rho\lambda}{\rho + r_0} sen[\omega t - k\rho - kr]_{r_0 + \frac{(p-1)\lambda}{2}}^{r_0 + \frac{p\lambda}{2}}$$

- Sustituyendo los límites

$$A_p = \frac{K_p A_S \rho\lambda}{\rho + r_0}\{-sen[\omega t - k\rho - kr_0 - p\pi] +$$
$$+ sen[\omega t - k\rho - kr_0 - (p-1)\pi]\}$$

- Desarrollando

$$A_p = \frac{K_p A_S \rho\lambda}{\rho + r_0}\{-sen[\omega t - k(\rho + r_0)]\cos(p\pi) +$$
$$+ sen[\omega t - k(\rho + r_0)]\cos[(p-1)\pi]\}$$

- Llegamos a la contribución de la zona #*p*.

$$A_p = (-1)^{p+1}\frac{2K_p A_S \rho\lambda}{\rho + r_0}\mathrm{sen}[\omega t - k(\rho + r_0)]$$

- Muy importante:
  - Signos alternados.
  - Unica dependencia geométrica en $K(\theta)$.

Talacha conceptual

- Contribución de TODAS las zonas a la amplitud en P (suma finita).

$$A(P) = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_m$$
$$= |A_1| - |A_2| + |A_3| - \cdots \pm |A_m|$$

- Supongamos m impar. La suma se puede agrupar de dos maneras:

$$A(P) = \frac{|A_1|}{2} + \left(\frac{|A_1|}{2} - |A_2| + \frac{|A_3|}{2}\right) + \left(\frac{|A_3|}{2} - |A_4| + \frac{|A_5|}{2}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{|A_{m-2}|}{2} - |A_{m-1}| + \frac{|A_m|}{2}\right) + \frac{|A_m|}{2}$$

$$= |A_1| - \frac{|A_2|}{2} + \left(\frac{|A_2|}{2} - |A_3| + \frac{|A_4|}{2}\right) + \left(\frac{|A_4|}{2} - |A_5| + \frac{|A_6|}{2}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{|A_{m-3}|}{2} - |A_{m-2}| + \frac{|A_{m-1}|}{2}\right) + \frac{|A_{m-1}|}{2} + |A_m|$$

- Recordando que el único cambio es por el factor de inclinación se tienen dos casos:

1. Si $|A_p| > \dfrac{|A_{p-1}| + |A_{p+1}|}{2}$

   cada término en paréntesis es negativo y se tiene

$$A(P) < \frac{|A_1|}{2} + \frac{|A_m|}{2}$$

   pero también

$$A(P) > |A_1| - \frac{|A_2|}{2} - \frac{|A_{m-1}|}{2} + |A_m| \approx$$
$$\approx \frac{|A_1|}{2} + \frac{|A_m|}{2}$$
$$\therefore \quad A(P) \approx \frac{|A_1|}{2} + \frac{|A_m|}{2}$$

Sigue talacha

2. Si $\left|A_p\right| < \dfrac{\left|A_{p-1}\right| + \left|A_{p+1}\right|}{2}$ cada término entre paréntesis es positivo, se invierten las desigualdades intermedias y se llega al mismo resultado:

$$A(P) \approx \frac{\left|A_1\right|}{2} + \frac{\left|A_m\right|}{2}$$

Si m es par se llega a:

$$A(P) \approx \frac{\left|A_1\right|}{2} - \frac{\left|A_m\right|}{2}$$

- Por último, incluimos la dependencia del factor de inclinación entre la zona 1 (θ=0) y la zona m (θ=π). Por tanto la contribución de la última zona es cero y en ambos casos se tiene

$$A(P) = \frac{\left|A_1\right|}{2}$$
$$= \frac{K_1 A_S \rho\lambda}{\rho + r_0} \operatorname{sen}[\omega t - k(\rho + r_0)]$$

¡Amplitud en P es la mitad de lo que contribuye la primera zona!

Conclusiones

- Propagando un frente esférico de radio ρ hasta el punto P fuera de la esfera obtuvimos una amplitud

$$A(P) = \frac{K_1 A_S \rho\lambda}{\rho + r_0} \operatorname{sen}[\omega t - k(\rho + r_0)]$$

- Si hubiéramos propagado la onda desde S hasta P sin dar tanta vuelta hubiéramos obtenido

$$A(P) = \frac{A_0}{\rho + r_0} \cos[\omega t - k(\rho + r_0)]$$

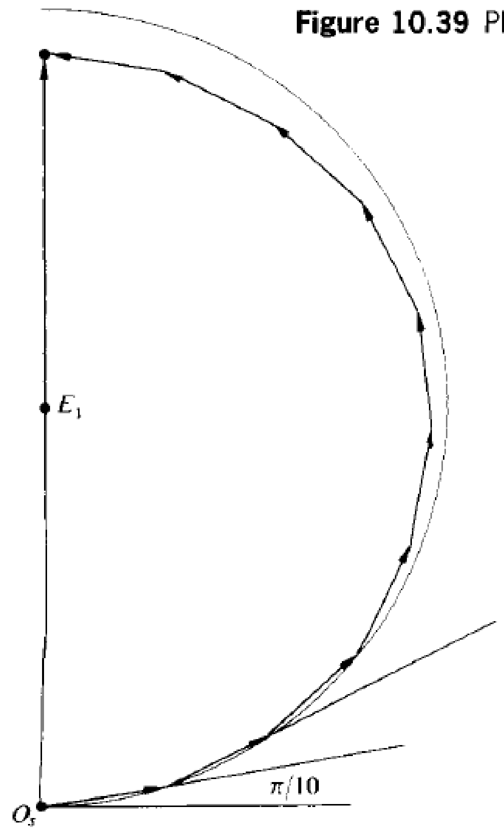
- Luego entonces el principio de Huygens-Fresnel (casi) da el resultado correcto si $A_0 = A_S \rho\lambda$

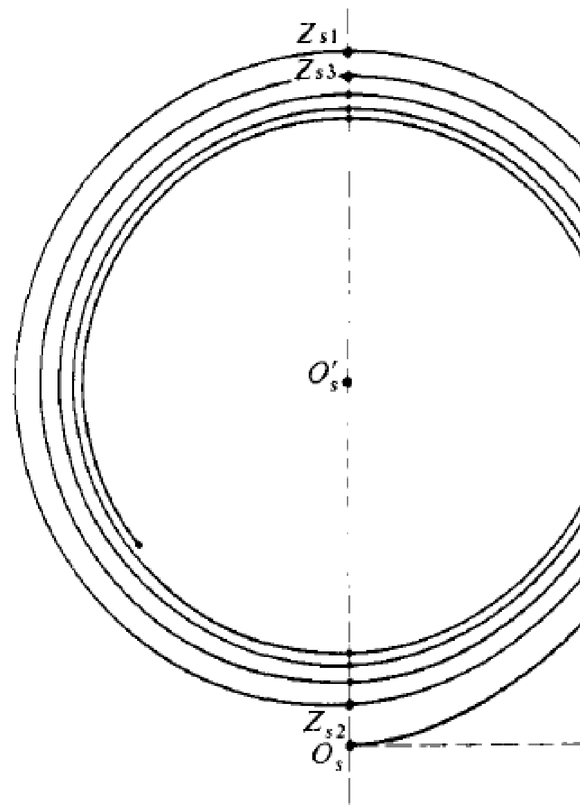
$$\therefore \quad A_S = \frac{A_0}{\rho\lambda} = \frac{A_\rho}{\lambda}$$

y además no nos preocupa el cambio en fase de $\pi/2$.

Curvas de vibración

Figure 10.39 Phasor addition.





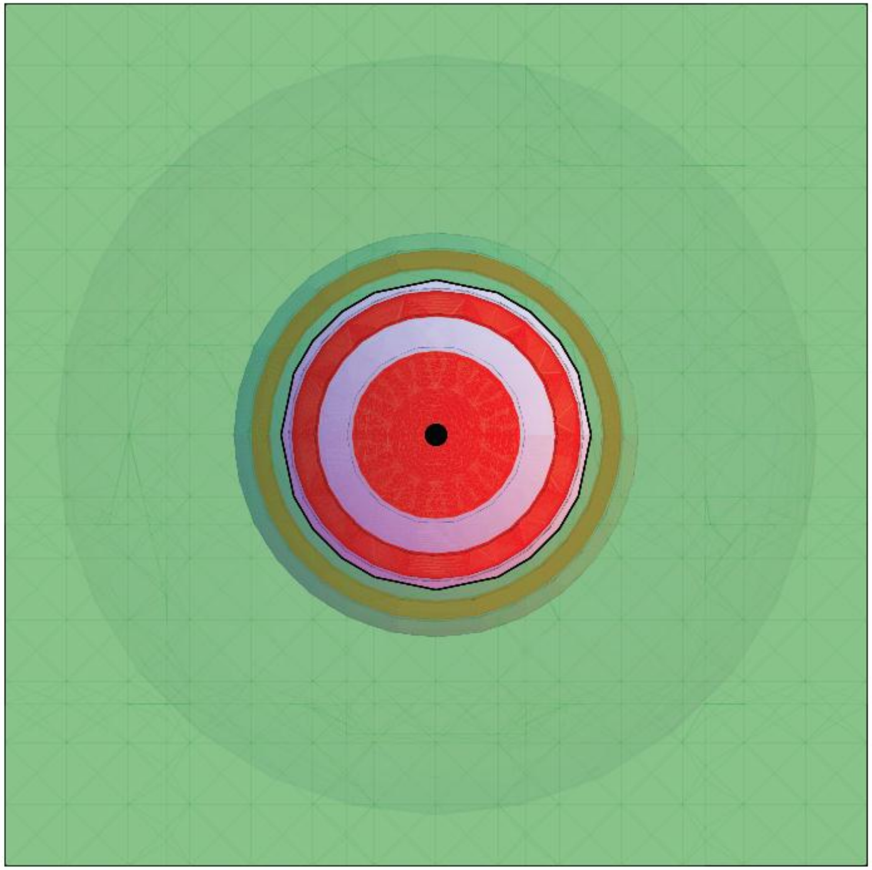
Apertura circular

- La amplitud en el punto P después de pasar por una apertura circular - calcular el número de zonas contenidas en la apertura.
- Area de la apertura: πR^2. Area de cada zona:

$$S_\ell = \int dS = 2\pi \frac{\rho}{\rho + r_0} \int_{r_0+(\ell-1)\frac{\lambda}{2}}^{r_0+\ell\frac{\lambda}{2}} r\,dr \approx \frac{\pi\rho r_0\lambda}{\rho + r_0}$$

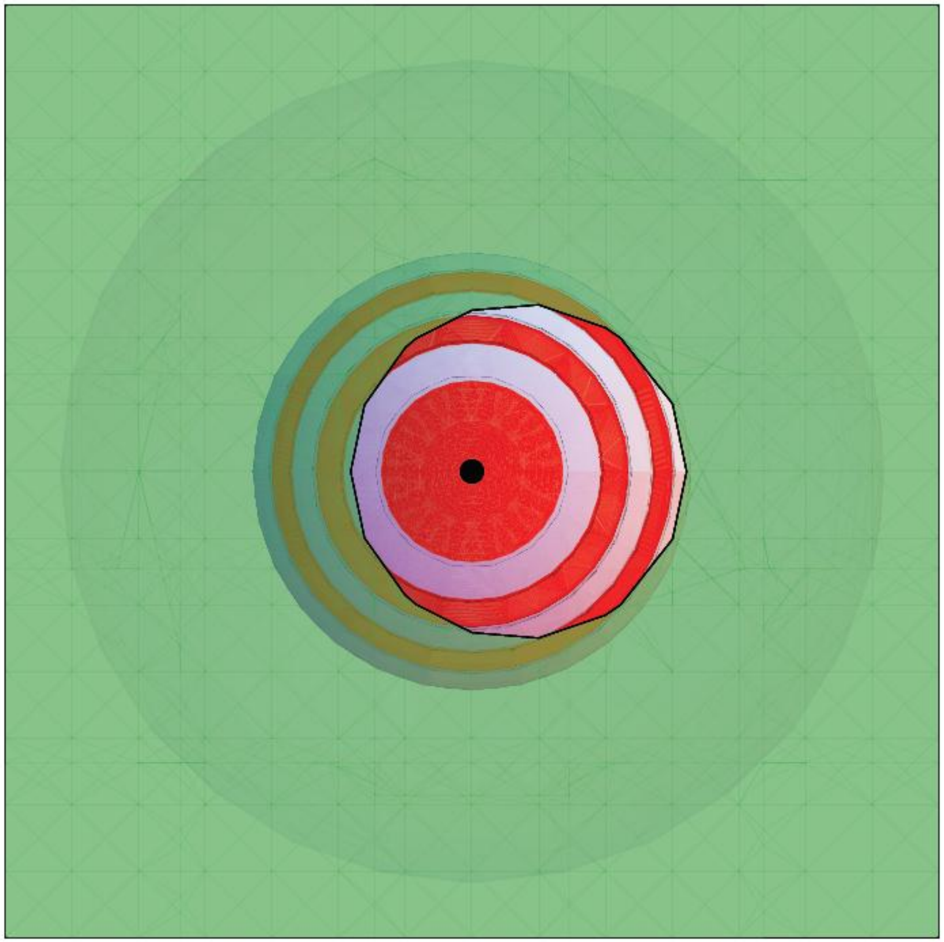
y el número de zonas es

$$\frac{R^2(\rho + r_0)}{\rho r_0 \lambda}$$



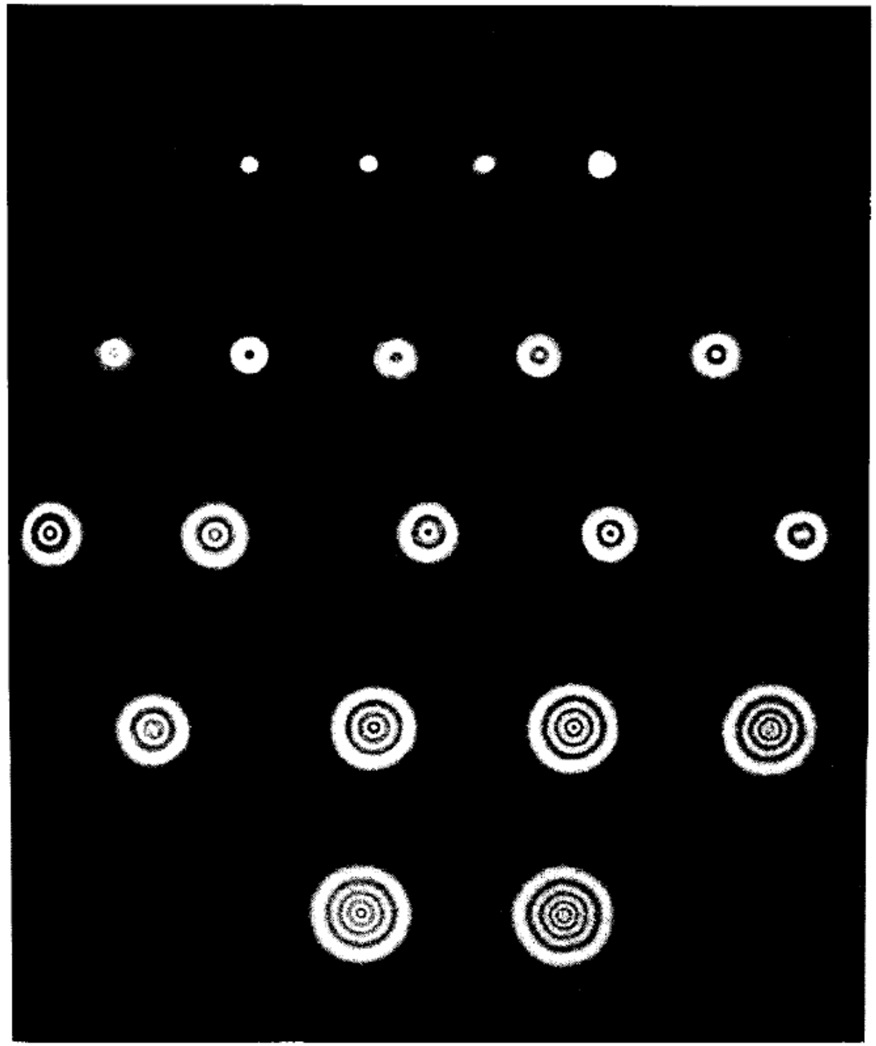
- Si este número es impar se tiene un punto brillante, si es par uno oscuro. Si es fracción se tiene un punto intermedio.

Puntos fuera del eje

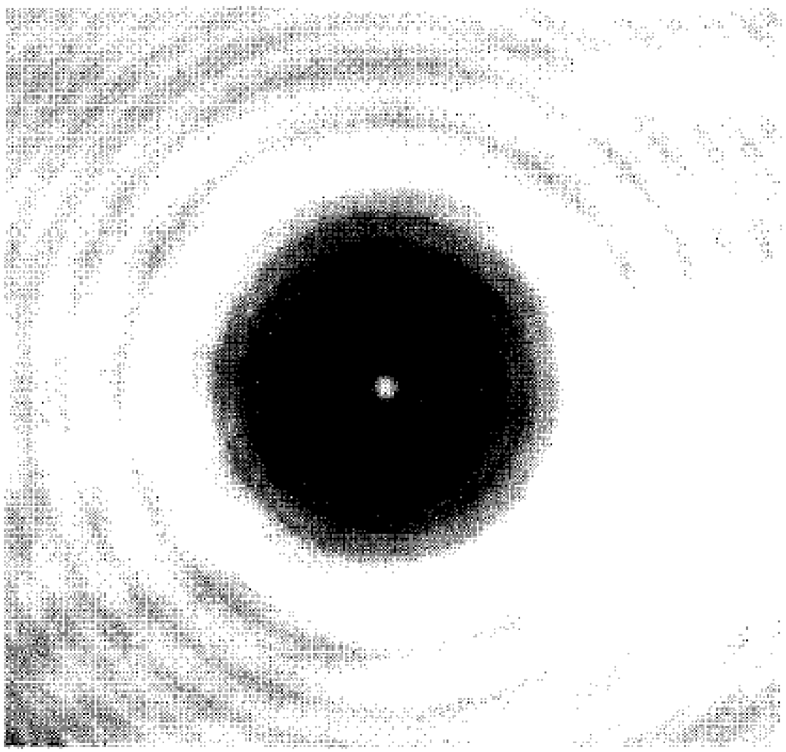


- Si P no queda alineado con el centro de la apertura y S, podemos pensar que lo que hemos movido es la apertura, dejando S y P fijos (no es mala aproximación si la apertura no es muy grande).
- Contamos fracciones de zonas descubiertas.

Abriendo apertura



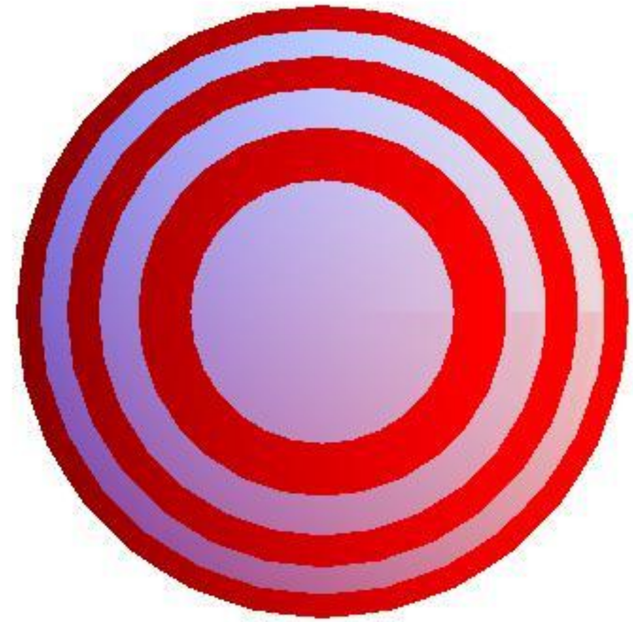
Punto de Poisson



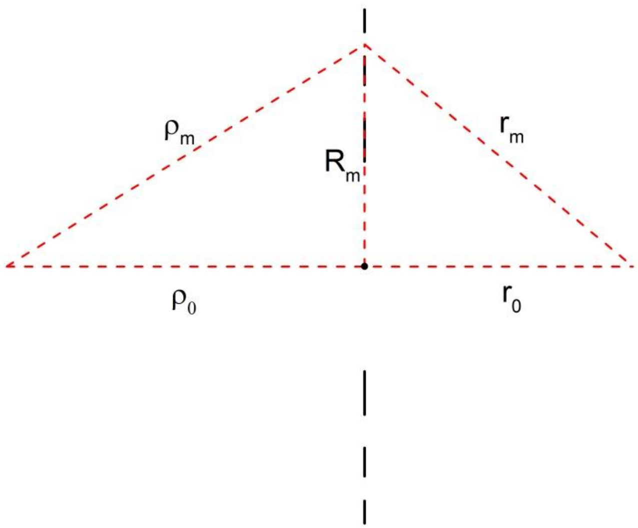
- Al aplicar el mismo análisis a un obstáculo circular se tiene que se bloquean las primeras *p-1* zonas, y la amplitud en un punto sobre el eje es $A_p/2$.
- Por tanto debe haber un punto brillante en el centro de la sombra de un objeto perfectamente circular.

Placas zonales

- Signos alternados: bloquear el paso de la luz por todas las zonas pares (o impares) -> se suman las amplitudes impares (pares) con el mismo signo.
- Intensidad: cuadrado de la amplitud ~ $N^2 I_0$.



Construcción



- De la figura se tiene

$$\rho_m = \sqrt{R_m^2 + \rho_0^2} \approx \rho_0 + \frac{R_m^2}{\rho_0}$$

$$r_m = \sqrt{R_m^2 + r_0^2} \approx r_0 + \frac{R_m^2}{r_0}$$

- Sustituyendo se obtiene

$$\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} = \frac{m\lambda}{R_m^2}$$

- ¿Suena conocida?

$$f = \frac{R_m^2}{m\lambda}$$

- Diferencia en camino es, por definición de la zona m

$$(\rho_m + r_m) - (\rho_0 + r_0) = m\lambda/2$$